



TITLE:

On Unramified Abelian Extensions of Local Fields with Arbitrary Residue Field of Characteristic $p \neq O$ and Its Application to Wildly Ramified \mathbb{Z}_p -Extensions (代数的整数論)

AUTHOR(S):

三木, 博雄

CITATION:

三木, 博雄. On Unramified Abelian Extensions of Local Fields with Arbitrary Residue Field of Characteristic $p \neq O$ and Its Application to Wildly Ramified \mathbb{Z}_p -Extensions (代数的整数論). 数理解析研究所講究録 1975, 230: 70-78

ISSUE DATE:

1975-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105433>

RIGHT:

On unramified abelian extensions of local fields
with arbitrary residue field of characteristic $p \neq 0$
and its application to wildly ramified \mathbb{Z}_p -extensions

東大 理 三木 博雄

この講演の詳細は文献[4]に述べてあるので、ここでは
要点を述べることにする。

p を素数, k を標数 p の任意の体を剰余体にもつ離散付値
で完備な体とし, k の剰余体を \bar{k} , k の整数環を \mathcal{O}_k , \mathcal{O}_k の
単数群を U_k とかく。

次の問題(1)(2)を考えよう。

問題(1) k の不分岐アーベル拡大の理論をつくること。

問題(2) k の完全分岐な \mathbb{Z}_p -拡大の全体 $\mathcal{F}_\infty(k)$ と k か
ら構成されるある集合 $W_\infty(k)$ との間の 1対1 の対応を見い出
すこと。ここで K/k がガロア拡大でそのガロア群 $G(K/k)$ が
位相群として p 進整数環 \mathbb{Z}_p の加法群に同型であるとき K は
 k の \mathbb{Z}_p -拡大であるとよばれている。

上の問題は伊原[1]で述べられている問題「 $\mathbb{Q}(t)_p$ の類体論をつくること」を考えている過程で生じたものである。

以下問題(1)(2)について補足しよう。

問題(1)の補足. よく知られているように, $\bar{\mathbb{K}}$ の不分岐アーベル拡大と $\bar{\mathbb{K}}$ のアーベル拡大とは canonical に 1対1に対応しているから, 問題(1)は本質的には標数 p の任意の体 $\bar{\mathbb{K}}$ の上のアーベル拡大の理論をつくることと同値である. そして $\bar{\mathbb{K}}$ のアーベル拡大の理論については, 拡大の次数が p でめれないときは Kummer theory, exponent が p のアーベル拡大については Artin-Schreier 拡大の理論, exponent が p のべきのアーベル拡大については Witt の理論([7])がよく知られている. 剰余体 $\bar{\mathbb{K}}$ へ移さずに直接 $\bar{\mathbb{K}}$ での formulation を得たいというのが問題(1)の目標である.

問題(2)の補足. 一般の $\bar{\mathbb{K}}$ でやらず, 次の条件(i)(ii)を仮定して考える.

(i) p は $\bar{\mathbb{K}}$ の素元である.

(ii) 有限体 \mathbb{F}_p は $\bar{\mathbb{K}}$ の maximum perfect subfield である. つまり, $\mathbb{F}_p = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{\mathbb{K}})^{p^n}$.

Teichmüller [6] によれば, 標数 p の任意の体 $\bar{\mathbb{K}}$ について p を素元にもち $\bar{\mathbb{K}}$ を剰余体にもつ離散付値で完備な体 $\bar{\mathbb{K}}$ はただひとつ存在する. ゆえに,

$$(*) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathcal{K})^{p^n} = \mathbb{F}_p$$

をみたす標数 p の体 \mathcal{K} は上の条件 (i) (ii) をみたす \mathcal{K} と $\mathcal{K} \mapsto \bar{\mathcal{K}}$ により 1 対 1 に対応している. $(*)$ をみたす \mathcal{K} の例としては $\mathcal{K} = \mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p(t), \mathbb{F}_p\{t\}$ (有限体, 有理函数体, 形式的べき級数体) などがある. $\mathcal{K} = \mathbb{F}_p$ のときは $\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$ (p 進数体), $\mathcal{K} = \mathbb{F}_p(t)$ のときは $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(t)_p$ となる.

$\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$ のときは問題 (2) の解答は次のとおりである. 局所類体論により, \mathbb{Q}_p の完全分岐な \mathbb{Z}_p -拡大の全体 $\mathcal{J}_{\infty}(\mathbb{Q}_p)$ と $U_p^{(1)} = \{u \in \mathbb{Z}_p^{\times} \mid u \equiv 1 \pmod{p}\}$ は次の対応で 1 対 1 に対応している: $K_{\infty} \mapsto u \in U_p^{(1)}$ s.t. $pu \in \bigcap_{n=1}^{\infty} N_{K_n/\mathcal{K}}(K_n^{\times})$. ただし K_n/\mathcal{K} は K_{∞}/\mathcal{K} の p^n -次 sub-extension である. この対応を上 (i) (ii) をみたす一般の \mathcal{K} について拡張したい というのが問題 (2) の目標である.

以下, 上の問題 (1), (2) について得られた結果を紹介しよう.

§.1 不分岐アーベル拡大

以下次数 m の完全分岐な巡回拡大 \mathcal{K}'/\mathcal{K} を固定して考える. 任意の有限次不分岐拡大 K/\mathcal{K} について,

$$G^*(K) = N_{K'/K}(U_K) \cap \mathcal{K} / N_{\mathcal{K}'/\mathcal{K}}(U_{\mathcal{K}})$$

とおく. ただし $K' = K\mathbb{R}'$ とおいた. $G^*(K)$ は明らかに $U_{\mathbb{R}} / N_{\mathbb{R}'/\mathbb{R}}(U_{\mathbb{R}'})$ の部分群である. そして

$$W(\mathbb{R}'/\mathbb{R}) = \bigcup G^*(K)$$

とおく. ただし和はすべての有限次不分岐拡大 K/\mathbb{R} にわた
り, $U_{\mathbb{R}} / N_{\mathbb{R}'/\mathbb{R}}(U_{\mathbb{R}'})$ の中で和を考えている. $W(\mathbb{R}'/\mathbb{R})$ も
明らかに $U_{\mathbb{R}} / N_{\mathbb{R}'/\mathbb{R}}(U_{\mathbb{R}'})$ の部分群である. $\widetilde{W}(\mathbb{R}'/\mathbb{R})$ を
 $W(\mathbb{R}'/\mathbb{R})$ の有限部分群の全体からなる集合とし, \mathcal{F}_m を \mathbb{R}
の有限次不分岐アーベル拡大 K で $(G(K/\mathbb{R}))^m = 1$ となるも
のの全体とする. また群 G について G の指標群を $\chi(G)$ であ
らわす. 以上の Notation のもとで,

Theorem A. 次の (1), (2) が成立する.

- (1) $K \in \mathcal{F}_m$ ならば, $G^*(K)$ から $\chi(G(K/\mathbb{R}))$ の上への
canonical な同型が存在する.
- (2) \mathcal{F}_m と $\widetilde{W}(\mathbb{R}'/\mathbb{R})$ は $K \mapsto G^*(K)$ により bijective
に対応する. さらに, $K_1, K_2 \in \mathcal{F}_m$ のとき, $K_1 \subset K_2$ と
 $G^*(K_1) \subset G^*(K_2)$ は同値である.

次に Theorem A の意味について述べる. $m \neq 0 \pmod{p}$
のとき, よく知られているように, 完全分岐な m 次巡回拡大
 \mathbb{R}'/\mathbb{R} が存在することと \mathbb{R} が (従って \mathbb{R}' が) 1 の原始 m 乗
根を含むことと同値である. そしてこの場合容易に $W(\mathbb{R}'/\mathbb{R})$
 $= (\overline{\mathbb{R}})^{\times} / (\overline{\mathbb{R}}^{\times})^m$, $G^*(K) = (\overline{\mathbb{R}})^{\times} \cap (\overline{K})^m / (\overline{\mathbb{R}}^{\times})^m$ がわかる

から, Theorem A は Kummer theory と本質的に同じである. また m が p のべきの場合 は本質的には Witt の理論 ([7]) と同じである. Witt の formulation は加法的であるのに対し Theorem A は乗法的である. Witt の理論における $W_n(\bar{k}) / \wp W_n(\bar{k})$ に対応するのが $W(k'/k)$ である. ただし $m = p^n$ で $W_n(\bar{k})$ は \bar{k} -係数の長さ n の Witt vector のつくる環の加法群で, $\wp(x) = x^p - x$, ただし $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ である. また \wp -map と Norm map が対応している. 従って Theorem A は本質的に Kummer 理論と Witt の理論を含んでいる.

また \bar{k} が完全体のときは $W(k'/k) = U_{\bar{k}} / N_{\bar{k}/k}(U_{\bar{k}})$ が証明できるが, Theorem A は群 $U_{\bar{k}} / N_{\bar{k}/k}(U_{\bar{k}})$ のひとつの意味を与えている. つまり $U_{\bar{k}} / N_{\bar{k}/k}(U_{\bar{k}}) \cong \chi(G(K_m/k))$. ただし K_m は \bar{k}_m に属する体の全体の合併体である.

\bar{k} が一般の場合の $W(k'/k)$ の開リについては文献 [4] の §5 を参照して下さい.

§2 \mathbb{Z}_p -拡大への応用

問題(1)と(2)は一見無関係のように思われるが、序文の中の条件(i), (ii)のもとでは、次のTheoremにより、それらは密接に結びついている。

Theorem ([3]の主定理). K を離散付値 v で完備な標数0の体で標数 p ($\neq 0$)の剰余体 \overline{K} をもつとし、次の条件(i), (ii), (iii)をみたす部分体 K_0 を含むとする。

- (i) K_0 は v の K_0 への制限で完備である。
- (ii) K_0 の剰余体 $\overline{K_0}$ は \overline{K} の maximum perfect sub-field である。つまり、 $\overline{K_0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{K})^{p^n}$ である。
- (iii) K_0 の素元は K の素元である。

このとき K の任意の \mathbb{Z}_p -拡大は K_0 のある \mathbb{Z}_p -拡大と K のある不分岐な \mathbb{Z}_p -拡大との合成体に含まれる。

さて (i), (ii) の仮定のもとで問題(2)について得られた結果を述べよう。

条件(i)により、 $K_n(\zeta_1) = K(\zeta_{n+1})$ となる K の p^n 次巡回拡大 K_n がある。ただし ζ_i は1の原始 p^i 乗根である。 $K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ とおけば、 K_∞ は K の完全分岐な \mathbb{Z}_p -拡大である。

$H_n(K) = \{x \in U_K \mid x \equiv a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n \pmod{p^{n+1}}, a_i \in \mathcal{O}_K\}$ とあくと、これは U_K の部分群であることが言明できる。また

$N_{\mathbb{K}_n/\mathbb{K}}(U_{\mathbb{K}_n})$ は $H_n(\mathbb{K})$ の部分群であることが証明される.

$$W_n(\mathbb{K}) = H_n(\mathbb{K}) / N_{\mathbb{K}_n/\mathbb{K}}(U_{\mathbb{K}_n}) \quad n=1, 2, \dots$$

とあくと $\{W_n(\mathbb{K}); \rho_n'\}$ は射影系となる. ただし $n' \geq n$ について, $\rho_n': W_{n'}(\mathbb{K}) \rightarrow W_n(\mathbb{K})$ は natural injection $H_{n'}(\mathbb{K}) \rightarrow H_n(\mathbb{K})$ によって induce される homomorphism である. この projective limit を $W_\infty(\mathbb{K})$ とする:

$$W_\infty(\mathbb{K}) = \varprojlim W_n(\mathbb{K}).$$

$\mathcal{F}_\infty(\mathbb{K})$ は問題 (2) のとおりとする. このとき, Theorem A の応用として (他のいくつかの命題ももちいて) 次の Theorem B をえる.

Theorem B. 序文の中の条件 (i), (ii) のもとで, $\mathcal{F}_\infty(\mathbb{K})$ から $W_\infty(\mathbb{K})$ への map F を $\mathbb{K}'_\infty \mapsto (N_{\mathbb{K}'_\infty/\mathbb{K}}(\pi'_n) / N_{\mathbb{K}_n/\mathbb{K}}(\pi_n) \bmod N_{\mathbb{K}_n/\mathbb{K}}(U_{\mathbb{K}_n}))$ で定義する. ただし \mathbb{K}'_n/\mathbb{K} は $\mathbb{K}'_\infty/\mathbb{K}$ の p^n -次の sub-extension で π_n, π'_n はそれぞれ $\mathbb{K}_n, \mathbb{K}'_n$ の素元である. このとき F は π_n, π'_n のとり方によらず, F は $\mathcal{F}_\infty(\mathbb{K})$ と $W_\infty(\mathbb{K})$ の間の 1対1 の対応を与える.

特に $\mathbb{K} \cong \mathbb{Q}_p$ のときは $W_\infty(\mathbb{Q}_p) = \cup_p^{(1)}$ が容易にわかり, Theorem B の F は序文に述べた局所類体論による $\mathcal{F}_\infty(\mathbb{Q}_p)$ と $\cup_p^{(1)}$ との対応と一致していることに注意されたい.

Corollary. Theorem B と同じ仮定のもとで, 次の (1) (2) は同値である.

- (1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} N_{\mathbb{K}'_n/\mathbb{K}}(\mathbb{K}'_n^{\times})$ が \mathbb{K} の素元を含む.
- (2) $\mathbb{K}'_{\infty} = \mathbb{K}_c \mathbb{K}$ となる \mathbb{Q}_p の \mathbb{Z}_p -拡大 \mathbb{K}_c が存在する. つまり $\mathbb{K}'_{\infty}/\mathbb{K}$ は \mathbb{Q}_p -定数拡大である.

文 献

- [1] 伊原 康隆 : ある p -進完備な関数体についての問題, 数理研講究録 41, 1968, pp. 7-17.
- [2] B. Dwork : Norm residue symbol in local number fields, Hamb. Abh. 22, 1958, pp. 180-190.
- [3] H. Miki : On \mathbb{Z}_p -extensions of complete p -adic power series fields and function fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA, Vol. 21, pp. 377-393.
- [4] H. Miki : On unramified abelian extensions of local fields with arbitrary residue field of characteristic $p \neq 0$ and its application to wildly ramified \mathbb{Z}_p -extensions, J. Math. Soc. Japan に投稿中.
- [5] J. P. Serre : Corps locaux (2nd edition), Hermann, Paris, 1968.
- [6] O. Teichmüller, Diskret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenem Restklassenkörper,

J. Reine Angew. Math. 176, 1937, pp. 141-152.

[7] E. Witt : Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p von Grade p^n , J. Reine Angew. Math. 176, 1936, pp. 126-140.